一类最值问题解法赏析

曾伟

(江西省永丰中学，江西 吉安 331500)

同学们都知道对于定义在 D 上的函数 $f(x)$ 其最大值表述为：首先存在 $M\in\mathbf{R}$，对任意的 $x\in D$，均有 $f(x)\leqslant M$；其次存在 $x_0\in D$，有 $f(x_0)=M$. 当两者同时满足时，我们就说函数 $f(x)$ 在 D 上的最大值为 M，最小值有类似表述. 因此简单来说成为最值的两个条件：一是上(下)界，二是可达到. 正是基于该想法我们可以解决数学竞赛中常见的一类最值问题，以下通过几道例题加以说明.

例1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，对于对应法则为 $f(x)=$

$$\begin{cases} x, & x\in(0,1)\backslash A, \\ \dfrac{p+1}{q}, & x\in A=\left\{x \mid x=\dfrac{p}{q}, p,q\in\mathbf{N}^*, (p,q)=1, p<q\right\}, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$ 上的最大值为________.

解 当 $x\in\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$ 且 x 为无理数时，$f(x)<\dfrac{8}{9}$.

当 $x=\dfrac{p}{q}\in\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$，则由 $\dfrac{7}{8}<\dfrac{p}{q}<\dfrac{8}{9}$，

可知 $8q-9p\geqslant 1, 8p-7q\geqslant 1$.

于是 $7(8q-9p)+8(8p-7q)\geqslant 15$，

故 $p\geqslant 15$. 同理 $q\geqslant 17$.

记 $q-p=t$，则 $8t-p\geqslant 1, t\geqslant\dfrac{p+1}{8}$.

此时 $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{p+1}{q}=\dfrac{p+1}{p+t}\leqslant\dfrac{p+1}{p+\dfrac{p+1}{8}}$

$=\dfrac{8p+8}{9p+1}=\dfrac{8}{9}\left[1+\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{1}{p+\dfrac{1}{9}}\right]\leqslant\dfrac{8}{9}\left(1+\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{1}{15+\dfrac{1}{9}}\right)=\dfrac{16}{17}$；

另一方面，当 $\dfrac{p}{q}=\dfrac{15}{17}$ 时，$f\left(\dfrac{15}{17}\right)=\dfrac{16}{17}$.

故所求最大值为 $\dfrac{16}{17}$.

点评 本题中所给的函数并非初等函数，连续性和可导性得不到保证，常用的通过导数求最值的方法失效，此时回到最值的本质定义，一方面得到任意 $x\in\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$，$f(x)\leqslant\dfrac{16}{17}$；另一方面 $\dfrac{16}{17}$ 这个值是可取到. 因此最大值为 $\dfrac{16}{17}$.

例2 设 λ 为正实数，对于任意两两不等的正实数 a,b,c，均有

$$\frac{a^3}{(b-c)^2}+\frac{b^3}{(c-a)^2}+\frac{c^3}{(a-b)^2}\geqslant\lambda(a+b+c).$$

求 λ 的最大值.

解 取 $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}-\varepsilon, c=\varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{1}{4}\right)$，则由题意有 $\lambda\leqslant\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}{\left(\dfrac{1}{2}-2\varepsilon\right)^2}+\left(\dfrac{1}{2}-\varepsilon\right)+\varepsilon$

$=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}{\left(\dfrac{1}{2}-2\varepsilon\right)^2}+\dfrac{1}{2}$ 对于任意的 $\varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{1}{4}\right)$ 都成立.

注意到当 $\varepsilon\to 0^{+}$ 时，

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{2}-2\varepsilon\right)^{2}}+\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

因此 $\lambda\leqslant 1$.

下证：$\lambda=1$ 成立，即证

$$\frac{a^{3}}{(b-c)^{2}}+\frac{b^{3}}{(c-a)^{2}}+\frac{c^{3}}{(a-b)^{2}}\geqslant a+b+c. \quad ①$$

不妨设 $a>b>c$，可令

$a=c+x,b=c+y\ (x>y>0)$.

则①左边

$$=\frac{(c+x)^{3}}{y^{2}}+\frac{(c+y)^{3}}{x^{2}}+\frac{c^{3}}{(x-y)^{2}}=\frac{x^{3}+3x^{2}c+3xc^{2}+c^{3}}{y^{2}}+\frac{y^{3}+3y^{2}c+3yc^{2}+c^{3}}{x^{2}}+\frac{c^{3}}{(x-y)^{2}}>\frac{x^{3}+3x^{2}c}{y^{2}}+\frac{y^{3}+3y^{2}c}{x^{2}}=\left(\frac{x^{3}}{y^{2}}+\frac{y^{3}}{x^{2}}\right)+3c\left(\frac{x^{2}}{y^{2}}+\frac{y^{2}}{x^{2}}\right)>\frac{(x+y)^{3}}{(x+y)^{2}}+3\cdot 2c\cdot\sqrt{\frac{x^{2}}{y^{2}}\cdot\frac{y^{2}}{x^{2}}}=x+y+6c>x+y+3c=a+b+c,$$

从而 $\lambda=1$ 时结论成立.

综上：λ 的最大值为 1.

点评 区别于例1函数型的上界需要严格论证，本题为不等式型（要求恒成立），故只需取特殊的 a,b,c，再通过极限运算，得到 λ 的一个上界 1；第二步论证 1 是可达的，实际上就转化为证明（不含参）不等式的证明问题，通过做代换结合均值不等式可得证.

例3 已知函数 $f(x)=(1-x^{2})(x^{2}+bx+c)$，$(x\in[-1,1])$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 $M(b,c)$. 当 b,c 变化时，求 $M(b,c)$ 的最小值.

解 因为对任意 $x\in[-1,1]$，都有 $|f(x)|\leqslant M(b,c)$，所以取 $x=\pm\lambda,0$ 得

$$\begin{cases}|c|\leqslant M(b,c),\\|(1-\lambda^{2})(\lambda^{2}+b\lambda+c)|\leqslant M(b,c),\\|(1-\lambda^{2})(\lambda^{2}-b\lambda+c)|\leqslant M(b,c).\end{cases}$$

从而有 $|(1-\lambda^{2})(\lambda^{2}+c)|\leqslant M(b,c)$.

则 $|(1-\lambda^{2})\lambda^{2}|\leqslant|(1-\lambda^{2})(\lambda^{2}+c)|+(1-\lambda^{2})|c|\leqslant(2-\lambda^{2})M(b,c)$，

从而有 $M(b,c)\geqslant\dfrac{(1-\lambda^{2})\lambda^{2}}{2-\lambda^{2}}$，

注意到 $\left[\dfrac{(1-\lambda^{2})\lambda^{2}}{2-\lambda^{2}}\right]_{\max}=3-2\sqrt{2}$.

因此 $\lambda\geqslant 3-2\sqrt{2}$.

另一方面：当 $M=3-2\sqrt{2},b=0,c=2\sqrt{2}-3$ 时，

$(1-x^{2})(x^{2}+2\sqrt{2}-3)\leqslant 3-2\sqrt{2}\Leftrightarrow(x^{2}-2+\sqrt{2})^{2}\geqslant 0$，

$x^{2}=2-\sqrt{2}$，即 $x=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 上式等号成立.

综上：$M(b,c)$ 的最小值为 $3-2\sqrt{2}$.

点评 $|f(x)|$ 的最大值为 $M(b,c)$，$M(b,c)$ 实际上是关于 b,c 的一个二元函数. 首先通过取特殊的 x，利用绝对值不等式，得到 $M(b,c)\geqslant\dfrac{(1-\lambda^{2})\lambda^{2}}{2-\lambda^{2}}$，$\lambda\in[-1,1]$. 右边关于 λ 的一元函数在闭区间 $[-1,1]$ 上的最大值就是以 b,c 为自变量的二元函数的一个下界；证明可达到时，实际上是取 $(b,c)=(0,2\sqrt{2}-3)$，$M(b,c)=3-2\sqrt{2}$.

以上三道例题将该想法由抽象描述转化为具体呈现，当然，不限于函数、不等式，在数学竞赛中的集合、组合、数论等内容也中有许多问题是基于该想法得以解决的.

（责审 张思明）